

**INSTRUCCIONES**

- Antes de comenzar debe presentar su identificación para validar su identidad.
- Si le es posible, deberá imprimir el examen. Si no tiene acceso a una impresora, deberá abrirlo en su computadora y cerrar todas las demás ventanas. También deberá haber configurado previamente su computadora para que no entre en modo reposo durante todo el examen. Durante éste, sólo podrá utilizar el “scroll” del mouse o las flechas para desplazarse sobre el examen. No podrá utilizar el teclado en lo absoluto.
- La cámara de la computadora deberá estar enfocada sobre su rostro, sus manos y sobre las hojas del examen. El microfono deberá estar encendido todo el tiempo.
- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.
- Usando su teléfono móvil y la aplicación de uso gratuito 'CamScanner', deberá escanear todas las hojas de su examen y enviarlo al correo electrónico del posgrado [posgradocienciasfisicas@pegaso.fisica.unam.mx](mailto:posgradocienciasfisicas@pegaso.fisica.unam.mx). Ajuste la resolución de la aplicación para que el documento no tenga más de 5MB. Después de terminado el tiempo del examen, tendrá sólo 5 minutos para realizar el envío del examen. Después de ese tiempo, si no hay una razón excepcional, el examen no será considerado por el subcomité de admisión.

## Primera Parte

### I MECÁNICA CLÁSICA

- I-1. [5 pts] Una esfera de radio  $R$ , con distribución de masa uniforme  $M$ , rueda sin resbalar a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo  $\theta$  con la horizontal. La esfera se suelta del reposo desde la posición  $A$  en la Figura 1. En este punto, el centro de masa de la esfera está a una altura  $h$ . Determine la velocidad con la que la esfera llega al punto  $B$ , es decir al pie del plano. El momento de inercia de la esfera respecto a cualquier diámetro es  $I_c = \frac{2}{5}MR^2$ .
- I-2. [5 pts] Considere un sistema masa-resorte, de masa  $m$  y constante de fuerza  $k$ , que describe oscilaciones armónicas simples en una dimensión espacial.
- (a) Determine el Hamiltoniano  $\mathcal{H}$  del sistema.
- (b) Escriba explícitamente las ecuaciones de Hamilton-Jacobi correspondientes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_x} &= \frac{d}{dt}x, \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} &= -\frac{d}{dt}p_x.\end{aligned}$$

- (c) A partir del sistema de ecuaciones de movimiento de primer orden del inciso (b), recupere la ecuación de movimiento correspondiente de segundo orden.

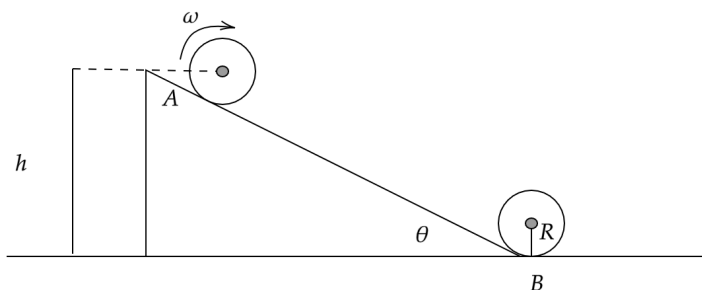


Figure 1: La esfera rueda sin resbalar al bajar por el plano inclinado.

## II MECÁNICA CUÁNTICA

- II-1. [3 pts] Para el oscilador armónico en una dimensión, demuestre que los elementos de matriz  $\langle m|x|n\rangle$  son diferentes de 0, para las soluciones  $|n\rangle$ ,  $|m\rangle$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , solo si  $m = n \pm 1$ .

Recordar:  $x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ , con  $\hat{a}^\dagger$  el operador de creación de estados.

- II-2. [3 pts] Determine los valores y vectores propios del operador  $\hat{S}_y$  para un sistema de espín 1/2. ¿Cuál es la probabilidad que  $\hat{S}_z$  tenga el valor  $\hbar/2$  cuando este sistema se encuentra en el estado que corresponde al mayor de los valores propios anteriores?

Use

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

- II-3. [4 pts] Definiendo para un electrón en un átomo de hidrógeno el estado  $|n, l, m\rangle$ , con números cuánticos principal, de la magnitud de momento angular y componente en  $\hat{\mathbf{z}}$ , respectivamente, su función de onda al tiempo  $t = 0$  es:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2} \left( |1, 0, 0\rangle + \sqrt{3}|2, 1, -1\rangle \right).$$

Calcule:

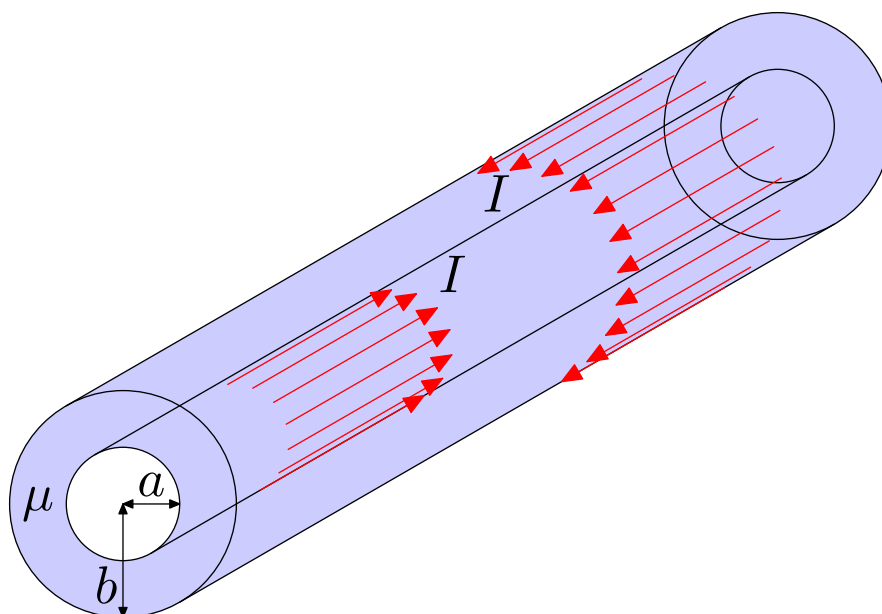
- i. El valor promedio de la energía al tiempo  $t = 0$ .
- ii. La función de onda  $|\psi(t)\rangle$ .
- iii. La contribución orbital a la energía del sistema, si se aplica un campo magnético constante  $\mathbf{B}$ , asociado al hamiltoniano  $-\frac{e}{2mc}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L}$ , a primer orden en teoría de perturbaciones.  $\mathbf{L}$  es el operador de momento angular.

Usar:  $E_n = -\frac{1}{2}mc^2\alpha^2/n^2$ , con  $m$  la masa reducida del electrón,  $\alpha$  la constante de estructura fina.

## III ELECTROMAGNETISMO

III-1. [5 pts] Un cable coaxial consiste en dos tubos conductores cilíndricos concéntricos muy largos, separados por un material aislante de permeabilidad magnética  $\mu$ . Una corriente  $I$  fluye por el conductor interno de radio  $a$  y regresa por el externo de radio  $b > a$ , es decir, en sentidos opuestos. En ambos casos la corriente se distribuye uniformemente sobre la superficie de los tubos.

- i. [3 pts] Encuentre el campo magnético en la región entre los tubos así como en el exterior.
- ii. [2 pts] ¿Cuál es la magnetización resultante del material aislante y la corriente inducida en sus superficies interna y externa?



III-2. [5 pts] Considere un dipolo eléctrico puntual con momento dipolar  $\mathbf{p} = \frac{p}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$  (en coordenadas cartesianas), colocado en la posición  $(0, 0, d)$ , con  $d > 0$ , arriba de la superficie  $z = 0$  de un conductor semi-infinito que ocupa la región  $z \leq 0$ .

- i. [2 pts] Encuentre el dipolo imagen  $\mathbf{p}'$  así como su posición, tal que el potencial electrostático en  $z = 0$  es nulo.
- ii. [3 pts] Determine la energía de interacción entre el conductor y el dipolo.

*Sugerencia:* Recuerde que el campo eléctrico producido por un momento dipolar puntual  $\mathbf{p}_0$  es  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \propto 3\frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{r}}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_0}{r^3}$ , en donde  $\mathbf{r}$  es la posición con respecto al dipolo.

## IV TERMODINÁMICA

IV-1. [4 pts] Un gas ideal monoatómico obedece las siguientes ecuaciones de estado:

$$pV = nRT$$

y

$$U = \frac{3}{2}nRT.$$

El gas sufre una expansión isotérmica del estado  $p_1, V_1$  hasta un estado con volumen  $V_2$ .

- i. ¿Cuánto vale la presión en el estado final?
  - ii. ¿Cuánto trabajo realizó el sistema?
  - iii. ¿Cuánto calor intercambió con el baño térmico?
  - iv. Calcule el cambio de la energía libre de Helmholtz
- IV-2. [3 pts] Explique porqué la segunda ley implica que ninguna máquina operando en ciclos entre dos fuentes a temperaturas fijas tiene una eficiencia mayor que la de una máquina reversible operando entre las mismas fuentes.
- IV-3. [3 pts] Un líquido particular ebulle a  $127\text{ }^\circ\text{C}$  a una presión de 800 mm Hg. Tiene un calor latente de vaporización de 1000 cal/mol. ¿A qué temperatura ebullición si la presión se eleva a 810 mm Hg?

## V FÍSICA MODERNA

- V-1. [4 pts] Muestre que la cantidad  $c^2t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$  asociada a un evento es invariante (la misma para todos los observadores) en cualquier marco de referencia inercial y es igual a  $c^2\tau^2$ , donde  $\tau$  es el tiempo propio.
- V-2. [2 pts] Escriba la configuración electrónica del Carbono (C) con número atómico  $Z = 6$ .
- V-3. [4 pts] Un átomo con masa en reposo  $m_0$  y velocidad  $v = 0$  en un laboratorio, absorbe un fotón de frecuencia  $\nu$ . Encuentre la velocidad y masa de la partícula de retroceso.

## Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Discuta el problema de Kepler.
- Indique la relevancia que tiene el espín en la descripción de partículas idénticas.
- Ondas electromagnéticas, ¿de dónde surgen? ¿Qué implican?
- Enuncie la tercera ley de la termodinámica y discuta algunas de sus implicaciones físicas.
- Explique sobre las fuerzas fundamentales entre las partículas elementales.

**INSTRUCCIONES**

- No olvide escribir claramente su nombre completo en la esquina superior derecha de cada hoja de sus respuestas, y utilizar una hoja nueva para responder cada problema. Indique claramente en la parte superior también el número del ejercicio que está resolviendo en cada hoja.
- El examen es a libro cerrado, por lo que no puede consultar libros, apuntes, formularios, etc. Tampoco puede usar dispositivos electrónicos como “tablets”, “smart-phones”, etc. Si lo requiere, puede usar una calculadora simple.
- El tiempo total para la primera parte es de tres horas y para la segunda de 45 minutos. Le sugerimos utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas.
- Usted podrá llevarse los enunciados del examen de admisión.
- Aspirantes que exentaron alguna de las secciones del examen: La duración del examen depende del número de secciones que debe resolver (40 min. por sección/materia). También se le sugiere utilizar no más de 30 minutos para responder a cada una de las secciones de problemas. En todos los casos, deberá resolver la “Segunda Parte” (ensayo) de este examen.

## Primera Parte

### I MECÁNICA CLÁSICA

- I-1. Para el problema de Kepler de un campo central,
- [2 pts] Escriba el Lagrangiano del sistema.
  - [2 pts] Muestre a partir del Lagrangiano que el momento angular se conserva.
  - [2 pts] Calcule el Hamiltoniano del sistema.
- I-2. [2 pts] Plutón tiene un radio que es  $1/5$  del radio de la tierra y su masa es  $1/500$  la masa de la tierra. Calcule el valor de la aceleración de la gravedad  $g$  en la superficie de Plutón.
- I-3. [2 pts] Dos partículas, una de masa  $m$  y la otra de masa  $2m$ , están unidas por un resorte comprimido. La energía del resorte comprimido es de 60 Joules. Si se libera el resorte y arroja a las masas, ¿cuál es la energía cinética de cada una de las masas?

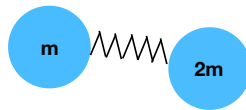


Figure 1: Figura problema 3

## II MECÁNICA CUÁNTICA

II-1. [7 pts] Sea un oscilador armónico con el hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2,$$

donde el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  denota un operador. Sus dos primeras funciones normalizadas son  $\phi_0(x)$  y  $\phi_1(x)$ .

- [1 punto] Escriba la ecuación de valores propios general para tal oscilador armónico. Dé la expresión de sus niveles de energía.
- [1 punto] Expresar las funciones  $\phi_\alpha(x, t)$ , con  $\alpha = 0$  y  $1$ , gracias a la evolución temporal de los estados estacionarios.

Siguiendo con el mismo hamiltoniano, considere ahora un sistema, el cual en  $t = 0$  está descrito por la siguiente función de onda:

$$\psi(x, t = 0) = \cos \theta \phi_0(x) + \sin \theta \phi_1(x),$$

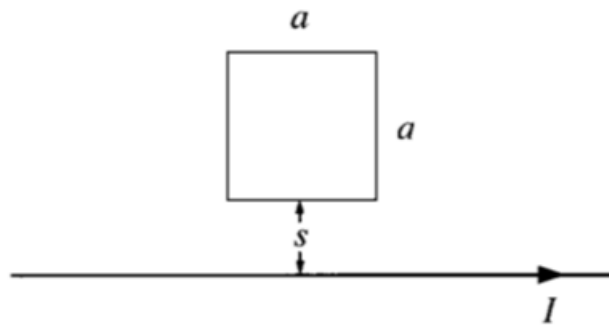
con  $0 \leq \theta < \pi$ .

- [1 punto] ¿Cuál es la función de onda  $\psi(x, t)$  en el tiempo  $t$ ?
  - [2 puntos] Calcule los valores medios  $\langle E \rangle$ ,  $\langle E^2 \rangle$  y  $\Delta E^2 = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ . Explique su dependencia en el tiempo.
  - [2 puntos] Calcule la evolución temporal de  $\langle x \rangle$  y  $\langle x^2 \rangle$ ; exprese en términos de una integral sobre  $x$  de las funciones  $\phi_\alpha(x)$  y comente.
- II-2. [3 pts] Responda “verdadero o falso” según sea el caso y comente.
- [1.5 puntos] Si  $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = \mathbf{0}$ , los niveles de energía no dependen de  $m$ , es decir de los valores propios de la proyección de uno de los componentes del momento angular  $\hat{\mathbf{L}}$ .
  - [1.5 puntos] Si  $[\hat{H}, \hat{L}^2] = 0$ , los niveles de energía no dependen de  $l$ .

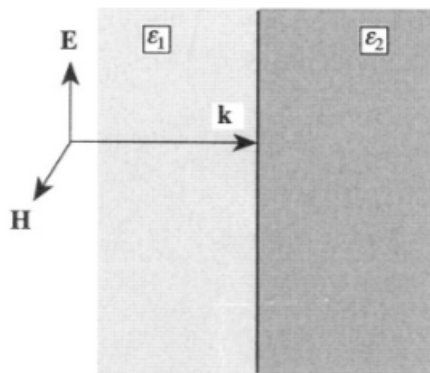


## III ELECTROMAGNETISMO

- III-1. [5 pts] Un circuito cuadrado, de lado  $a$ , yace sobre una mesa, a una distancia  $s$  de un alambre recto y muy largo que porta una corriente  $I$ , como se muestra en la figura.
- Calcule el flujo magnético a través del circuito.
  - Si el circuito se mueve en la dirección perpendicular al cable con una velocidad  $v$ , ¿cuál es la FEM inducida? ¿en qué dirección fluye la corriente?
  - ¿Cuál es la FEM inducida si el circuito se mueve en la dirección de la corriente?



- III-2. [5 pts] Una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega$  se propaga a través de un medio aislante no permeable ( $\mu = 1$ ), con constante dieléctrica  $\epsilon_1$ . La onda incide normal sobre la interface de un medio similar con constante dieléctrica  $\epsilon_2$ , como se muestra en la figura.
- Derive las condiciones de borde para los campos eléctrico y magnético en la interface.  
*Hint: Vea la dirección de dichos campos en la figura.*
  - Encuentre la fracción de la energía incidente que se transmite al segundo medio.



## IV TERMODINÁMICA

- IV-1. [4 pts] Se encuentra que un cierto líquido ebulle a una temperatura de  $95\text{ }^{\circ}\text{C}$  en la cima de una colina, mientras que ebulle a  $105\text{ }^{\circ}\text{C}$  en la base de la colina. El calor latente del líquido es  $1000\text{ cal/mol}$ . La densidad del aire es  $1.225\text{ Kg/m}^3$  y la presión atmosférica en la base de la colina es  $101325\text{ Pa}$ . ¿Cuál es la altura aproximada de la colina?
- IV-2. [6 pts] Suponga que  $1.00\text{ kg}$  de agua a  $10.0\text{ }^{\circ}\text{C}$  se mezcla con  $1.00\text{ kg}$  de agua a  $30.0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a presión constante. Cuando la mezcla ha alcanzado el equilibrio
- ¿Cuál es la temperatura final?
  - Considere  $c_p = 4.19\text{ kJ/(kg K)}$  para el agua y calcule el cambio de entropía del sistema.
  - ¿Es la mezcla un proceso irreversible?

## V FÍSICA MODERNA

- V-1. [5 pts] Considere leche en polvo contaminada con Cs-137, con una actividad específica de  $7400\text{ Bq/kg}$ . Para obtener  $1\text{ litro}$  de leche líquida se utilizan  $250\text{ g}$  de leche en polvo disueltos en  $1\text{ litro}$  de agua. El Cs-137 decae por emisión  $\beta$  dando como resultado una  $\beta_1$  con  $E_{max} = 1.176\text{ MeV}$  ( $5.4\%$ ) y una  $\beta_2$  con  $E_{max} = 0.514\text{ MeV}$  ( $94.6\%$ ). La vida media física del Cs-137 es de  $30\text{ años}$ .
- Si la  $\beta_1$  lleva al núcleo hija a su estado basal (no excitado) y la  $\beta_2$  a un estado metaestable, indique cuál es el cambio en la  $Z$  del núcleo hija, el valor  $Q$  del decaimiento al estado base y la energía del fotón  $\gamma$  emitido.
  - Calcule el número de átomos de Cs-137 que son ingeridos por un niño que bebió un litro de esa leche radiactiva.
- V-2. [5 pts] Fotones monoenergéticos ( $200\text{ keV}$ ) con fluencia de  $10^{10}\text{ fotones/cm}^2$  impactan homogéneamente sobre la pared de un cilindro hueco (un tubo) de plomo ( $\rho = 11.4\text{ g/cm}^3$ ) de  $2\text{ cm}$  de diámetro, altura de  $10\text{ cm}$  y espesor de las pared de  $0.1\text{ cm}$ . Considere que para fotones de esa energía, el coeficiente másico de atenuación en plomo es de  $0.99\text{ cm}^2/\text{g}$ .
- Calcule el número de fotones que son atenuados en la pared del cilindro.  
Hint: El área de la superficie de ese tubo de plomo se puede determinar usando  $A = 2\pi rh$ .
  - De los fotones atenuados en la pared del cilindro, determine el número de eventos que son resultado del efecto fotoeléctrico. Considere que la probabilidad para el efecto fotoeléctrico para fotones de esa energía interaccionando en plomo es:  $\tau/\rho = 0.85\text{ cm}^2/\text{g}$ .

## Segunda Parte

De entre los temas listados a continuación elija uno y desarrolle una reflexión propia sobre él. Su desarrollo debe limitarse a una extensión máxima de una página, ser cualitativo, no exhaustivo, y debe evitar el uso de fórmulas innecesarias.

- Discuta el papel de los sistemas inerciales en las leyes de movimiento de Newton.
- Momento angular en cuántica.
- Ondas electromagnéticas, ¿de dónde surgen? ¿Qué implican?
- Explique y discuta el Teorema de Carnot.
- Discuta la dualidad onda-partícula de la radiación electromagnética.